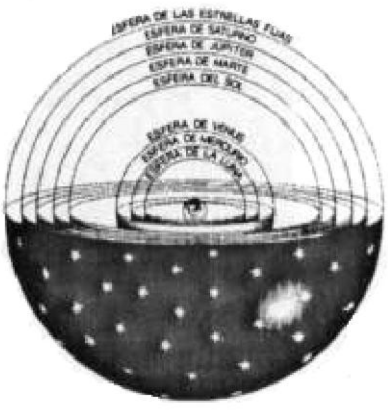
BLOQUE 1:
INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1.-EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS A TRAVÉS DE LA HISTORIA

La interacción gravitatoria tiene una gran influencia en el movimiento de los cuerpos, tanto de los que se encuentran en la Tierra o en sus proximidades, como los que se hallan en el espacio (planetas, estrellas, cometas, etc). El lanzamiento de proyectiles, el movimiento de las aguas de los ríos hacia el mar, la colocación de satélites en órbita, el desplazamiento de los astros en el espacio, etc., son ejemplos en los que la interacción gravitatoria tiene un papel fundamental. En cierto modo podríamos considerar que gobierna el movimiento de toda la materia. Sin embargo, llegar a esta conclusión no ha sido un proceso fácil. La idea del movimiento de los planetas y cuerpos celestes estuvo dividida en la Antigüedad en dos teorías fuertemente contrapuestas: la **TEORÍA GEOCÉNTRICA** y la **TEORÍA HELIOCÉNTRICA**.

2.- LOS ORÍGENES DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Cronológicamente, la concepción geocéntrica del Universo fue la que prevaleció inicialmente, debido entre otras cosas a las creencias religiosas de la época que se oponían a cualquier otra alternativa, y al apoyo de grandes científicos como Aristóteles. Se pensaba que las estrellas se encontraban todas en una gran esfera celeste que giraba alrededor de una Tierra inmóvil situada en su centro. Fuera de esa gran esfera celeste estaba el "Primer móvil" que la hacía girar con ritmo regular y dentro, había una serie de esferas concéntricas que contenían a los planetas, el Sol y la Luna, de forma que el movimiento de la esfera estrellada se transmitía a las interiores .Finalmente, en el siglo XVI, **Copérnico**, establece su Teoría Heliocéntrica, avalada posteriormente por los estudios de **Kepler** y **Galileo**, lo cual supuso un verdadero punto de inflexión en el desarrollo de la ciencia.



Copérnico afirmaba que el Sol ocupaba el centro del universo y los planetas (incluida la Tierra), giraban en órbitas circulares alrededor de éste al mismo tiempo que giraban sobre sí mismos alrededor de su propio eje. Tan sólo la Luna seguía girando en torno a la Tierra. El sistema incluía también una esfera inmóvil sobre la que se localizaban las estrellas fijas. Encontró una fuerte oposición, tanto por parte de las autoridades religiosas como del mundo científico y hubo de transcurrir más de un siglo hasta ser aceptada. Si el primer paso en este largo camino lo dio Copérnico, los siguientes correspondieron a Kepler y Galileo.

2.1- LEYES DE KEPLER

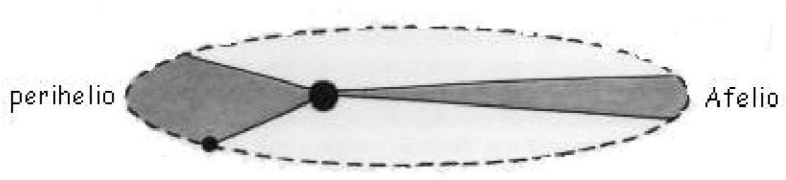
Kepler fue un astrónomo alemán partidario de la Teoría Heliocéntrica. Parte de su trabajo se basó en el análisis de una gran cantidad de datos astronómicos sobre los movimientos de los planetas que habían sido recopilados por su maestro Tycho Brae. En el curso de sus investigaciones se encontró con que no podía ajustar los datos que tenía sobre la órbita de Marte al sistema Heliocéntrico. Después de varios intentos por conseguirlo, acabó por rechazar la idea de órbita circular de un planeta alrededor del Sol y sustituirla por la de órbita elíptica con el Sol ocupando uno de los focos de la elipse. Analizando todos sus datos, enunció tres leyes que describían el movimiento planetario y que contribuyeron años más tarde, al nacimiento de la Ley de la Gravitación Universal de Newton.

1º. **Todos los planetas describen órbitas elípticas planas con el Sol ocupando uno de los focos de la elipse**

ü **En la mayoría de los casos las excentricidades de los planetas son muy pequeñas, por lo que prácticamente pueden considerarse círculos descentrados. Aproximación a órbitas circulares**

2º. **Si imaginamos una recta trazada desde el Sol a uno de los planetas, podemos afirmar que el área barrida por dicha recta en un tiempo dado es la misma, independientemente de la zona de la órbita en la que éste se encuentre. Por lo tanto <u>la velocidad areolar de un planeta en torno al Sol, es constante</u>.**

ü **Así, un planeta se moverá más rápido en el perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) que en el afelio (punto más alejado) porque en el primero existe un radio menor y tendrá que cubrir más distancia para barrer (en un tiempo dado) la misma área que en el segundo.**



3º. **Si "T" es el tiempo que un planeta emplea en dar una vuelta completa en torno al Sol (<u>periodo de revolución</u>) y "r" el <u>radio medio de la órbita</u>, se cumple que el cuadrado del periodo de revolución es directamente proporcional al cubo del radio medio** $T^2 = K \cdot r^3$

ü **K es una constante de proporcionalidad igual para cualquier planeta y cuyo significado físico quedará claro al abordar la teoría de la gravitación de Newton.**

Las leyes de Kepler son empíricas y constituyen una descripción cinemática del sistema solar, pero en ellas no se contempla la causa que hace que estos movimientos sean así. Hubo que esperar unos 70 años para que Newton la estableciera: **LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.**

2.2 – IMPORTANCIA DE GALILEO

En la época de Newton (finales del XVII) la Teoría Heliocéntrica se enseñaba en algunas universidades. Para su consolidación definitiva fueron fundamentales los descubrimientos de **GALILEO:**

- **Con su telescopio había observado montañas y valles en la Luna lo cual ponía de manifiesto que los cuerpos celestes no eran ni muchísimo menos perfectos, tal y como se creía hasta entonces.**
- **Por otro lado, también comprobó que el planeta Júpiter tenía lunas dando vueltas a su alrededor. Es decir, la Tierra ya no era el centro alrededor del cual giraban todos los cuerpos celestes.**

El establecimiento de la Teoría de la Gravitación culminó el proceso y puso fin a la barrera que hasta entonces existía entre la Tierra y el Cielo, (considerados como dos mundos diferentes formados por materia distinta y cada uno gobernado por sus propias leyes).

3.- GRAVITACIÓN UNIVERSAL

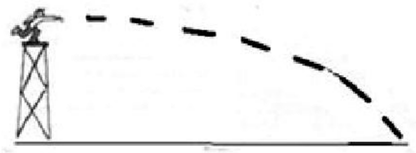
La idea de que la gravedad se extiende por todo el universo se atribuye a Isaac Newton. Según cuenta la leyenda, concibió esta idea cuando estaba sentado bajo un árbol, sintió caer una manzana y al mirar hacia arriba vio la Luna. Parece ser que a Newton le intrigaba el hecho de que la Luna no sigue una trayectoria en línea recta sino que describe círculos alrededor de la Tierra.

1. Entendía el concepto de inercia que Galileo había desarrollado. Sabía que en ausencia de fuerzas externas los objetos en movimiento continúan moviéndose con rapidez constante y en línea recta
2. También sabía que todo cambio en la rapidez o dirección de un objeto se debe a la acción de una fuerza, y por tanto implica la existencia de aceleración
3. Sabía que el movimiento circular es acelerado y requiere una fuerza, pero no sabía cual era esta.

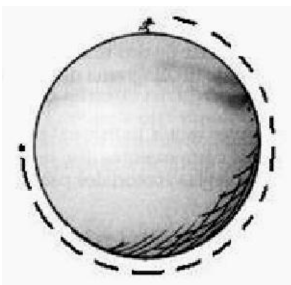
Newton tuvo la perspicacia para comprender que la Luna caía hacia la Tierra, pero ¿cómo?

LA LUNA CAE SOBRE LA TIERRA

Para dar respuesta a la pregunta anterior, Newton comparó el movimiento de la Luna con el de un proyectil disparado desde una montaña elevada, imaginó que la cima estaba por encima de de la atmósfera terrestre para que la resistencia del aire no influyera en su movimiento:



- Si la bala se dispara con poca rapidez seguiría una trayectoria parabólica y caería a tierra muy pronto



ü Si su rapidez inicial fuera mayor, la curvatura de la trayectoria sería menor, y la bala caería más lejos

ü Si la bala se disparase con la rapidez suficiente, la curvatura de la trayectoria coincidiría con la de la Tierra, de modo que su trayectoria se convertiría en un círculo y la bala rodearía la Tierra indefinidamente, es decir, caería alrededor de ella.

LA FUERZA QUE TIRA DE LAS MANZANAS Y LAS HACE CAER DE LOS ÁRBOLES ES LA MISMA QUE TIRA DE LA LUNA Y LA MANTIENE EN ÓRBITA $\Rightarrow$ LA GRAVEDAD

NEWTON NO DESCUBRIÓ LA GRAVEDAD. LO QUE DESCUBRIÓ FUE QUE LA GRAVEDAD ES UNIVERSAL

La idea de Newton parecía correcta. No obstante faltaba la respuesta definitiva, **¿qué fuerza era ésa y como podía describirse matemáticamente?** Mediante rigurosos cálculos matemáticos llegó a las siguientes conclusiones:

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1. La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza directamente proporcional a la masa de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa $\boxed{Fuerza \;\alpha\; \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$

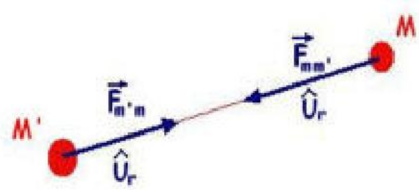
2. La expresión anterior se transforma en una igualdad introduciendo la constante de Gravitación Universal G y cuyo valor es el S.I es $G = 6'67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ $\boxed{Fuerza = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$

3. Vectorialmente, expresaremos esta fuerza de la siguiente manera: $\boxed{\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$

   donde **el signo negativo indica el carácter atractivo de la fuerza** y el vector unitario se emplea para dar a entender su actuación en la **dirección radial**, es decir, a lo largo de la línea que une los centros de los cuerpos.

Con respecto a esta expresión, debemos tener en cuenta algunas consideraciones de importancia:

1. Para esferas uniformes, se considera que se comportan como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de las mismas. Por lo tanto, la distancia r representa la distancia que existe entre los centros de los cuerpos. Esta conclusión es aplicable al caso de los planetas.



2. La fuerza que actúa sobre m_1 es igual que la que actúa sobre m_2 pero dirigida en sentido contrario tal y como establece el principio de acción y reacción. $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}|$ .Así pues, la fuerza que la Tierra ejerce

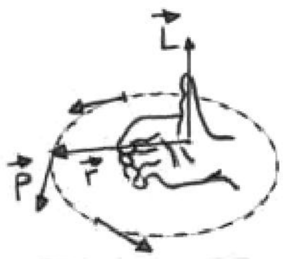
sobre la Luna es igual en magnitud que la fuerza que la Luna ejerce sobre la Tierra. Del mismo modo, la fuerza con que la piedra atrae a la Tierra es igual a la fuerza con que la Tierra atrae a la piedra.

4.- ESTUDIO DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

Al estudiar la traslación de un planeta o satélite consideraremos a estos cuerpos como puntos materiales dotados de la masa del cuerpo. Vamos a ver cuáles son las magnitudes características de este movimiento, considerando además que **la órbita que describen es circular**:

4.1- MOMENTO ANGULAR ($\vec{L}$)

Si un cuerpo o partícula de masa **m** se mueve con velocidad $\vec{v}$ y tiene una posición $\vec{r}$ con respecto a un origen determinado, definimos su **momento angular** en relación con ese origen como el producto vectorial de su posición por su momento lineal. Es decir: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})}$



Esta magnitud define el estado de movimiento de un cuerpo en movimiento curvilíneo, y se caracteriza por:

- La dirección de ($\vec{L}$) es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$
- Su sentido se determinará por la regla de la mano derecha (o también la de la mano izquierda)
- Su módulo viene dado por $L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\,\alpha$
- Las unidades del momento angular en el S.I son $kg \cdot \dfrac{m^2}{s}$
- Si consideramos un movimiento circular, aproximación que podemos considerar para el movimiento planetario $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son siempre perpendiculares y por lo tanto $sen\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow L = m \cdot r \cdot v$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

($\vec{M}$: Momento de una fuerza)

Este producto vectorial será cero y por tanto el momento angular se conserva en dos situaciones:

1. Cuando no actúa ninguna fuerza sobre el cuerpo.
2. Cuando $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección. Es el caso de las conocidas como **fuerzas centrales.**

En el caso del movimiento planetario se cumple la segunda condición, por lo tanto **es constante a lo largo del movimiento (cte tanto en módulo como en dirección),** y como consecuencia:

- Las órbitas de los planetas son planas
- La fuerza responsable del movimiento planetario (fuerza gravitatoria) es una fuerza central y actúa en la dirección que une el planeta y el Sol.

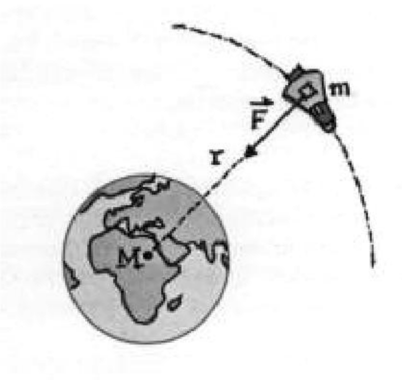
4.2- CONSIDERACIONES EN EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES

Normalmente, al estudiar este movimiento consideramos que el planeta o satélite se encuentra girando con movimiento circular uniforme. Por lo tanto, deberá existir una fuerza resultante dirigida hacia el centro de la órbita. Es decir, el vector fuerza resultante sobre el cuerpo que gira sólo tiene componente normal:

$$\boxed{F_n = m \cdot a_n \xrightarrow{a_n = \frac{v^2}{r}} F_n = m \cdot \frac{v^2}{r}}$$

Esa fuerza normal es la fuerza gravitatoria con la que el cuerpo de masa **m** es atraído por el de masa **M:**

$$\boxed{F_{gravitatoria} = F_{normal} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a_n}$$



$$Periodo\ de\ revolucion\ (T) \rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}\ (s)$$

$$Velocidad\ angular\ (\omega) \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\ (rad/s)$$

$$Velocidad\ (v) \rightarrow \quad v = \omega \cdot r\ (m/s)$$

$$aceleracion\ (a) \rightarrow \quad a = a_n = \frac{v^2}{r}\ (m/s^2)$$

DEMOSTRACIÓN DE LA 3ª LEY DE KEPLER A PARTIR DE LAS LEYES DE NEWTON

Considerando que la fuerza normal que hace girar a un cuerpo alrededor de otro no es otra que la fuerza gravitatoria, podemos escribir:

$$F_{Grav} = F_{Normal}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a_n$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = G \quad (3^a\ Ley\ de\ Kepler)$$

Por tanto, años después de que Kepler enunciara la Ley, Newton demuestra matemáticamente su validez.

5.- CAMPO GRAVITATORIO

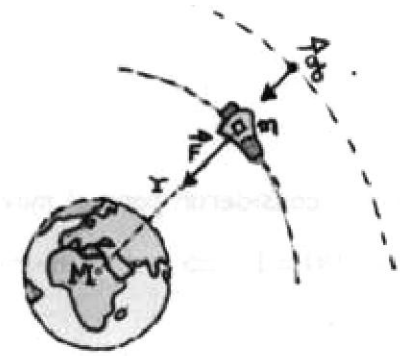
5.1 ¿CÓMO TIENE LUGAR LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA? CAMPO GRAVITATORIO

El hecho de que la fuerza gravitatoria actúe entre partículas que se encuentran separadas en el espacio, hace que debamos considerar algún mecanismo de propagación de la interacción. La **Teoría de Campos** establece que la presencia de una partícula de masa M en una determinada región del espacio provoca una modificación de las propiedades de dicho espacio creando una situación física que denominamos **campo gravitatorio**. Este campo se reconoce porque al colocar una segunda partícula de masa m en dicha región experimenta una fuerza de atracción gravitatoria que será más intensa cuanto más próxima se sitúe de M. Análogamente m crea su campo gravitatorio que produce una fuerza sobre M.

Es decir el campo gravitatorio es el agente intermediario de la interacción entre las dos partículas.

5.2 INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

Para facilitar el estudio del campo se introduce una magnitud llamada **intensidad del campo gravitatorio** $(\vec{g})$ en un punto, cuyo valor nos indica la fuerza que actuaría sobre una masa de 1kg si la colocásemos en dicho punto. Por lo tanto, es una magnitud vectorial, cuya dirección y sentido coincidirá con la del vector fuerza. **Es importante señalar que dicho campo existe y que su intensidad en un punto dado es independiente de que en él se coloque o no masa alguna.** Si consideramos una región del espacio donde existe un campo creado por un cuerpo de masa M, tal y como se ve en el gráfico inferior:



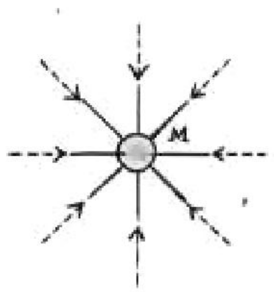
- En cualquier punto situado dentro del campo gravitatorio terrestre existirá un vector campo gravitatorio
- Si en algún punto se coloca una partícula de masa m, esta partícula se verá sometida a una fuerza de atracción gravitatoria
- La fuerza con la que la Tierra atrae a un cuerpo también se conoce como peso de dicho cuerpo. Habitualmente se representa con la letra P, de modo que: $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- Para obtener el valor del campo gravitatorio generado por una masa **M** en un punto "P" en el que existe una masa **m** $\Rightarrow$ $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ (se medirá en N / kg)

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\hat{u} \qquad \left|\vec{F}\right| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (N)$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2}\hat{u} \qquad \left|\vec{g}\right| = G \cdot \frac{M}{r^2} \quad (N / Kg)$$

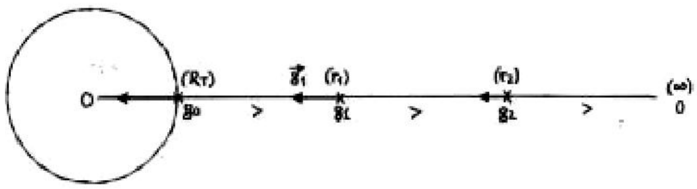
5.3 REPRESENTACIÓN DEL CAMPO MEDIANTE LÍNEAS DE FUERZA

Para visualizar un campo se recurre a **"líneas de fuerza"** que nos indican la dirección y sentido de la fuerza gravitatoria que experimentaría una masa de prueba m colocada en la zona del campo gravitatorio



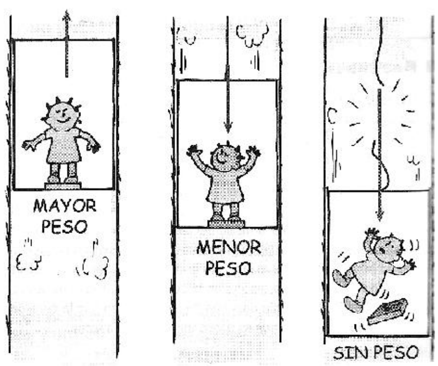
- **Si nos imaginamos una masa M creadora de un campo y pensamos que le ocurriría a una pequeña masa de prueba m si la fuésemos colocando en distintos puntos cercanos a M, veremos que las líneas de fuerza han de ser líneas rectas que llegan radialmente a la masa M**
- **En aquellos lugares donde las líneas de fuerza están más separadas la intensidad del campo es menor y viceversa**

5.4 INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE



- A una altura h sobre la superficie $\Rightarrow \quad g_h = G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{(R_{Tierra} + h)^2}$
- Sobre la superficie $\Rightarrow \quad g_O = G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{\left(R_{Tierra}\right)^2}$
- A una profundidad p $\Rightarrow \quad g_p = G \cdot \dfrac{\rho \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot r^3}{r^2} = \dfrac{4}{3} \cdot G \cdot \rho \cdot \pi \cdot (R_T - p)$ donde $\rho = \dfrac{M_{Tierra}}{\left(4/3 \cdot \pi \cdot r^3\right)}$ es la densidad media de la Tierra.

5.5 PESO E INGRAVIDEZ



La sensación de peso es igual a la **fuerza que ejerces contra el piso que te sostiene**. Cuando el piso se acelera hacia arriba o hacia abajo, tu peso parece variar. Cuando nada te sostiene (en caída libre) sientes que careces de él. Pero **la gravedad no ha desaparecido**. Así pues **¿estás realmente en condiciones de ingravidez?** La respuesta

es lógicamente que **NO**.

LOS ASTRONAUTAS EN ÓRBITA CARECEN DE UNA FUERZA DE SOPORTE Y SE ENCUENTRAN EN UN ESTADO CONTINUO DE INGRAVIDEZ LO QUE LES PRODUCE MAREOS HASTA QUE SE ACONTUMBRAN

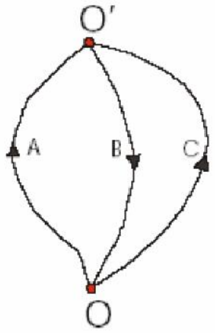
6.- CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS DEL CAMPO GRAVITATORIO

6.1 FUERZAS CONSERVATIVAS

La fuerza gravitatoria es una **FUERZA CONSERVATIVA**.

¿CUÁLES SON LAS CARACTERÍSTICAS DE LAS FUERZAS CONSERVATIVAS?

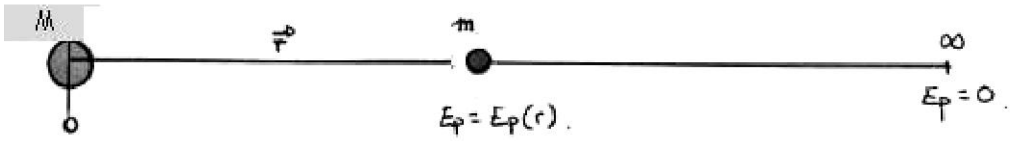
- **Son fuerzas bajo cuya acción se conserva la energía mecánica del sistema**
- **Realizan un trabajo que sólo depende de la posición inicial y final, pero no de la trayectoria seguida. Esto implica que, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para desplazar una partícula de masa m desde una posición (O) a otra (O´) , será función únicamente de las posiciones inicial y final y no dependerá del camino seguido. Si la trayectoria es cíclica el trabajo realizado por las fuerzas conservativas es nulo.** $W_A = W_B = W_C$



- **Teniendo en cuenta que la realización de un trabajo equivale a una variación de energía, se define un tipo de energía asociada a la posición y que se denomina energía potencial de modo que, el trabajo realizado por fuerzas conservativas equivale a la variación negativa de la energía potencial del sistema** $\boxed{W_{conservativas} = -\Delta E_p = E_p(posicion\ inicial) - E_p(posicion\ final)}$
- En el caso de la fuerza gravitatoria hablamos de Energía potencial gravitatoria $E_p = m \cdot g \cdot r$

6.2 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Si definimos la energía potencial en términos de trabajo, está claro que necesitamos dos puntos. Por este motivo, hay que establecer una referencia, **un** origen de **Energía potencial**. Fijaremos como valor cero de Ep aquel en el que la fuerza gravitatoria es cero, lo cual sucede en el infinito. Por lo tanto, para averiguar el valor de la energía potencial de la masa m en el punto P (situado a una distancia r de la masa m_1) calcularemos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar a m desde el infinito hasta el punto P: $W_\infty^P = E_p(\infty) - E_p(r) = -m \cdot \left(G \cdot \frac{M}{r^2} \right) \cdot r = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$



La energía potencial de una partícula de masa m situada a una distancia r de la masa creadora de ese campo es: $\boxed{E_p = -G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r} \quad (Julios)}$

La Energía potencial de una partícula en un punto es una magnitud escalar que indica el trabajo que realizaría la fuerza gravitatoria para llevarla desde el infinito (Ep=0) hasta dicho punto

6.3 POTENCIAL GRAVITATORIO

Una vez definida la Energía potencial en un punto, definimos otra magnitud a la que llamaremos Potencial gravitatorio (V) en un punto, cuyo valor coincide con el que tendría la energía potencial gravitatoria de una masa de 1 kg si la colocásemos en dicho punto.

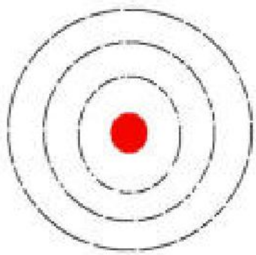
Conviene darse cuenta de que no es una magnitud vectorial y se mide en J/kg. Por otra parte, en cada punto del campo existe un potencial independientemente de que en él se coloque o no masa alguna, es decir, **el potencial gravitatorio es una característica propia del campo**.

Para conocer su valor en un punto determinamos la energía potencial de cualquier partícula, y después la dividimos entre su masa: $V = \dfrac{E_p}{m} = -G \cdot \dfrac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = -G \cdot \dfrac{M}{r} \quad (J/kg)}$

T **El potencial gravitatorio representa la energía potencial adquirida por la unidad de masa en un punto del campo donde, evidentemente, hemos considerado como origen de potenciales** $V(\infty) = 0$

6.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Por otra parte, un campo escalar como el campo de potenciales se representa mediante las **SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES** que son aquellos **lugares geométricos en los que el potencial (V) toma el mismo valor**.



En este caso son esferas concéntricas en el punto donde está situada la partícula creadora del campo.

6.5 VELOCIDAD DE ESCAPE

Supongamos que deseamos que un cuerpo de masa (m) abandone el campo gravitatorio terrestre y no vuelva a él. En términos físicos significa que el cuerpo ha de llegar hasta una distancia infinita donde la Ep=0). Para conseguirlo, tendremos que comunicarle una energía en forma de energía cinética que haga que el cuerpo adquiera la velocidad suficiente para escapar de la acción del campo gravitatorio terrestre y a la que denominamos **velocidad de escape**. Esta definición es aplicable a cualquier otro planeta o satélite

¿CÓMO PODEMOS AVERIGUAR SU VALOR?

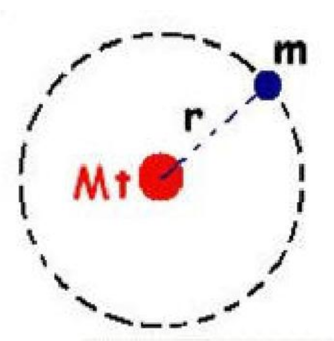
Puesto que la fuerza gravitatoria es conservativa, la energía mecánica se conserva en todos los sistemas en los que se ve implicada, y aplicando esta condición podremos averiguar el valor de v_e (velocidad de escape):

$$E_m(\sup erficie) = E_m(\infty)$$

$$E_m(\sup) = Ep(\sup) + Ec(\sup) \quad y \quad E_m(\infty) = 0$$

$$-G\cdot\frac{M\cdot m}{R_T} + \frac{1}{2}m\cdot v^2 = 0 \qquad v = v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R_T}}$$

6.6 ENERGÍA Y ÓRBITAS



La constancia de las órbitas planetarias permite suponer que la energía mecánica de los planetas y satélites de nuestro sistema solar se mantiene constante.

Supongamos un cuerpo de masa (m) que describe una órbita circular a una distancia (r) del centro terrestre ($r = r_T + h$) y que $m \ll m_T$. La energía potencial es, en consecuencia $E_p = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r}$

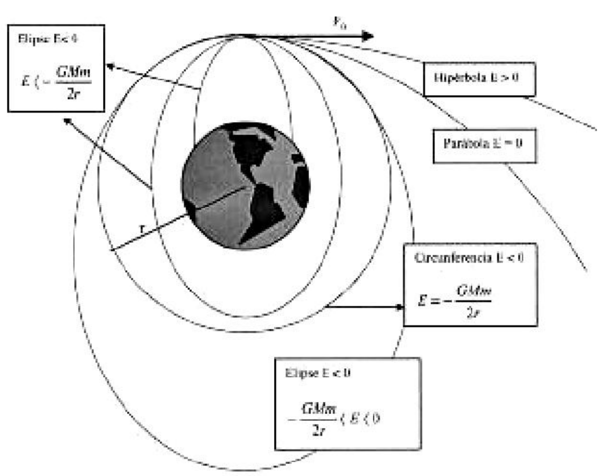
Si la órbita es circular, la fuerza gravitatoria es además, centrípeta por lo que $G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot\frac{v^2}{r}$

Lo cual nos permitirá escribir la energía cinética del cuerpo en órbita como: $E_C = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}$

En consecuencia, su Em total que será: E = Ec + Ep. Puede escribirse como:

$$E_m = G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r} - G\cdot\frac{M\cdot m}{r} = -G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}$$

$$\boxed{E_m = -G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}}$$



T **Como puede verse es una energía negativa lo cual sucede para órbitas circulares, en órbitas elípticas y, en general, para cualquier órbita cerrada.**

T **En el sistema solar, casi todos los cuerpos describen órbitas elípticas. Los planetas y la mayoría de los satélites tienen excentricidades bajas, de modo que en algunos casos las órbitas son casi circulares. Sin embargo, ciertos asteroides y** la mayoría de los cometas tienen excentricidades grandes

T Las trayectorias con energía mecánica positiva son de forma hiperbólica

T Las trayectorias con energía mecánica cero son de forma parabólica.

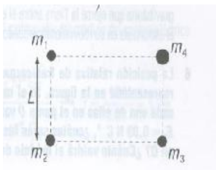
PROBLEMAS

1. Cuatro masas puntuales están situadas en los vértices de un cuadrado como se ve en la figura. Determinar:

a) Módulo, dirección y sentido del campo gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado

b) Potencial gravitatorio en este mismo punto

DATOS: $m_1=m_2=m_3=100$ kg, $m_4=200$kg, L=3m, G= $6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}



2. Dos masas de 2 y 5 kg se encuentran separadas una distancia de 1 m. ¿En qué punto a lo largo de la línea que las une se anula el potencial gravitatorio? ¿Y el campo?

3. Tenemos cuatro partículas iguales de 2 kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determina el módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

4. ¿En qué punto se anulan los campos gravitatorios creados por la Tierra y la Luna sabiendo que la masa de la Luna es la ochentava parte de la Tierra

DATOS: M_T= $5{,}98\times10^{24}$ kg, Distancia Tierra-Luna= 380000 km

5. Tres masas de 2, 8, y 4 kg se encuentran en los puntos B(2,0), O(0,0), y A(0,2), respectivamente
   a) Halla el campo gravitatorio en el punto (2,2)
   b) ¿Qué trabajo habría que realizar para llevar una masa de 5 kg desde el infinito hasta (2,2)?

6. Halla la velocidad de escape para un proyectil en Marte sabiendo que la gravedad en su superficie es 0,38 veces la de la Tierra.

DATO: Radio de Marte=3200 km

7. Un satélite de 2×10^3 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 2×10^4 km de radio.

a) Sabiendo que la gravedad en la superficie de la Tierra es de 9,8 ms^{-1}, ¿cuál será el valor de la gravedad en esta órbita?

b) ¿Cuánto vale la velocidad angular del satélite?

c) Si por alguna circunstancia la velocidad del satélite se anulara, este empezaría a caer sobre la Tierra. ¿Con qué velocidad llegará a la superficie terrestre? Suponer despreciable el rozamiento con el aire.

DATO: Radio de la Tierra= 6370 km

8. Se coloca un satélite meteorológico de 1000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:

a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo de la órbita.

b) La energía que se requiere para poner en órbita el satélite

DATOS: g (en la superficie)=9,8 m /s^2, R_T= 6370 km

9. **(C)** Para los planetas del sistema solar, según la tercera ley de Kepler, la relación R^3/T^2 es constante y vale $3,35x10^{18}$ m^3 /s^2, siendo R el radio de sus órbitas y T el periodo de rotación. Suponiendo que las órbitas son circulares, calcular la masa del Sol. **(Junio 2000)** **DATO: $G=6,67x10^{-11}$ SI**

10. **(P)** Se desea colocar en órbita un satélite de comunicaciones, de tal forma que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre (órbita geoestacionaria). Si la masa del satélite es de 1500kg, se pide calcular:
    a) Altura sobre la superficie terrestre a la que hay que situar el satélite
    b) Energía total del satélite cuando se encuentre en órbita
    DATOS: $G=6,67x10^{-11}$ SI; $M_{Tierra}=5,98x10^{24}$ kg; $R_{Tierra}=6370km$ (Septiembre 2000)

11. **(P)** Sean dos masas puntuales de 100kg y 150kg, situadas en los puntos A(-2,0) m y B(3,0) m, respectivamente. Se pide calcular:
    a) Campo gravitatorio en el punto C (0,4) m
    b) Trabajo necesario para desplazar una partícula de 10 kg de masa desde el punto C(0,4) m hasta el punto O(0,0) m **DATO: $G=6,67x10^{-11}$ SI** **(Septiembre 2000)**

12. **(C)** Si la Luna siguiera una órbita circular en torno a la Tierra, pero con un radio igual a la cuarta parte de su valor actual, ¿cuál sería su periodo de revolución? DATO: Tomar el periodo actual igual a 28 días **(Junio 2001)**

13. **(C)**¿Cuál debería ser la velocidad inicial de la Tierra para que escapase del Sol y se dirigiera hacia el infinito? .Supóngase que la Tierra se encuentra describiendo una órbita circular alrededor del Sol
    DATOS: Distancia T-Sol= $1,5x10^{11}$ m; $M_{Sol}=2x10^{30}$kg; $G=6,67x10^{-11}$ N m^2/kg^2 (Junio 2001)

14. **(C)** Enunciar las leyes de Kepler. Demostrar la tercera de ellas, para el caso de órbitas circulares, a partir de las leyes de la mecánica newtoniana **(Septiembre 2001)**

15. **(C)** El satélite Europa tiene un periodo de rotación alrededor de Júpiter de 85 horas y su órbita, prácticamente circular, tiene un radio de $6,67x10^5$ km. Calcular la masa de Júpiter.
    DATO: G= $6,67x10^{-11}$ SI **(Septiembre 2001)**

16. **(P)** Se determina, experimentalmente, la aceleración con la que cae un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre en dos laboratorios diferentes, uno situado al nivel del mar y otro situado en un globo que se encuentra a una altura h=19570 m sobre el nivel del mar. Los resultados obtenidos son g= 9,81 m/s^2 en el primer laboratorio y g´= 9,75 m/s^2 en el segundo laboratorio. Se pide:
    a) Determinar el valor del radio terrestre (1,2 puntos)
    b) Sabiendo que la densidad media de la Tierra es d_T=5523 kg/m^3, determinar el valor de la constante de gravitación G (0,8 puntos) **(Junio 2002)**

17. **(P)** Un satélite de 500 kg de masa se mueve alrededor de Marte, describiendo una órbita circular a $6x10^6$ m de su superficie. Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 3,7 m/s^2 y que su radio es 3400 km, se pide:
    a) Fuerza gravitatoria sobre el satélite(0,7 puntos)
    b) Velocidad y periodo del satélite (0,7 puntos)
    c) ¿A qué altura deberá el satélite para que su periodo fuese el doble?(0,6 puntos)
    (Junio 2002)

18. **(C)** Un astronauta que se encuentra dentro de un satélite en órbita alrededor de la Tierra a 250 km, observa que no pesa. ¿ Cuál es la razón de este fenómeno?. Calcula la intensidad del campo gravitatorio a esa altura. Comenta el resultado.

    DATOS: G=6,67x10^{-11} SI; M_{Tierra}=5,98x10^{24} kg; R_{Tierra}=6370 km (Septiembre 2002)

19. **(C)** La Tierra gira alrededor del Sol realizando una órbita aproximadamente circular. Si por cualquier causa, el Sol perdiera instantáneamente las tres cuartas partes de su masa,¿continuaría la Tierra en órbita alrededor de este?Razona la respuesta **(Septiembre 2002)**

20. **(C)** Calcula el cociente entre la energía potencial y la energía cinética de un satélite en órbita circular **(Junio 2003)**

21. **(C)** Una partícula puntual de masa 3M se coloca en el origen de un cierto sistema de coordenadas, mientras que otra de masa M se coloca sobre el eje X a una distancia de 1 m respecto del origen. Calcula las coordenadas del punto donde el campo gravitatorio es nulo **(Junio 2003).**

22. **(C)** Si consideramos que las órbitas de la Tierra y de Marte alrededor del Sol son circulares, ¿cuántos años terrestres dura un año marciano?.El radio de la órbita de Marte es 1,486 veces mayor que el terrestre **(Septiembre 2003)**

23. **(C)** Dibuja las líneas de campo del campo gravitatorio producido por dos masas puntuales iguales separadas una cierta distancia ¿Existe algún punto en el que la intensidad del campo gravitatorio sea nula ¿ En caso afirmativo indica en qué punto.¿ Existe algún punto en el que el potencial gravitatorio sea nulo? En caso afirmativo indica en que punto **(Septiembre 2003)**

24. **(P)** Un satélite artificial de 500 kg de masa se mueve alrededor de un planeta, describiendo una órbita circular con un periodo de 42,47 horas y un radio de 419000 km. Se pide:
    a) Fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite
    b) La energía cinética, la energía potencial y la energía total del satélite en su órbita
    c) Si, el satélite duplica repentinamente su velocidad sin cambiar la dirección, ¿se alejará éste indefinidamente del planeta? Razona la respuesta (0,7 puntos) **(Junio 2004)**

25. **(P)** Una partícula puntual de masa m_1=10kg está situada en el origen O de un cierto sistema de coordenadas. Una segunda partícula puntual de masa m_2=30 kg está situada, sobre el eje X, en el punto A de coordenadas (6,0) m. Se pide:
    a) El módulo, la dirección y sentido del campo en el punto B de coordenadas (2,0) m.(0,7 puntos)
    b) El punto sobre el eje X para el cual el campo gravitatorio es nulo(0,7 puntos)
    c) El trabajo realizado por el cuando la masa m_2 se traslada desde el punto A hasta el punto C de coordenadas (0,6) m (0,6 puntos) **DATO: G=6,67x10^{-11} (Junio 2004)**

26. **(P)** La órbita de una de las lunas de Júpiter, Io, es aproximadamente circular con un radio de 4,20x10^8 m. El periodo de la órbita vale 1,53x10^5 s. se pide:
    a) El radio de la órbita de la luna de Júpiter que tiene un periodo de 1,44x10^6 s(0,6 puntos)
    b) La masa de Júpiter (0,7 puntos)
    c) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter (0,7 puntos)

    DATOS: Radio de Júpiter R_j=71400 km, G=6,67x10^{-11} Nm^2/kg^2 (Septiembre 2004)

27. **(P)** Un satélite geoestacionario es aquel que se encuentra siempre en la misma posición respecto a un punto de la superficie de la Tierra. Se pide:
   a) La distancia sobre la superficie terrestre a la que ha de situarse un satélite geoestacionario(1.5 puntos)
   b) La velocidad que llevará dicho satélite en su órbita geoestacionaria (0,5 puntos)

   DATOS: M_T=6x10^{24} kg; R_T=6370 km; G=6,67x10^{-11} Nm^2/kg^2 (Septiembre 2004)

28. **(C)** Calcula el radio de la Tierra R_T, sabiendo que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa 20 kg, situado a una altura R_T sobre la superficie terrestre es E_P=-1,2446x10^9 J. Toma como dato el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre g=9,8 m/s^2 **(Junio 2005)**

29. **(C)** Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa M, con velocidad constante V. ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre el satélite durante una vuelta completa? Razona la respuesta **(Junio 2005)**

30. **(P)** Un objeto de masa m=1000 kg se acerca en dirección radial a un planeta de radio R_p=6000km, que tiene una gravedad g=10m/s^2 en su superficie. Cuando se observa este objeto por primera vez se encuentra a una distancia R_O=6R_p del centro del planeta. Se pide:
   a. ¿Qué energía potencial tiene este objeto cuando se encuentra a la distancia R_O?
   b. Determina la velocidad inicial del objeto v_0, es decir, cuando está a la distancia R_O, sabiendo que llega a la superficie del planeta con una velocidad v=12km/s **(Septiembre 2005)**

31. **(P)** Dos partículas puntuales con la misma masa m_1=m_2=100kg se encuentran situadas en los puntos (0,0) y (2,0) m, respectivamente. Se pide:
   a. ¿Qué valor tiene el potencial gravitatorio en el punto (1,0) m? Tómese el origen de potenciales en el infinito. Calcula el campo gravitatorio, módulo, dirección y sentido, que generan esas dos masas en el punto (1,0) m.
   b. Si la masa m_2 se dejara en libertad, la fuerza gravitatoria haría que se acercara a la masa m_1. Si no actúa ninguna otra fuerza,¿qué velocidad tendrá cuando esté a una distancia de 30cm de m_1?

   Dato: G=6,7x10^{-11} Nm^2/kg^2 (Septiembre 2005)

32. **(P)** Una sonda espacial de masa m=1200 kg se sitúa en una órbita circular de radio r=6000 km, alrededor de un planeta. Si la energía cinética de la sonda es E_c=5,4x10^{9}J. Calcula:
   a. El periodo orbital de la sonda
   b. La masa del planeta

   Dato: G=6,7x10^{-11} Nm^2/kg^2 (Junio 2006)

33. **(P)** Febos es un satélite que gira en una órbita circular de radio r=14460 km alrededor del planeta Marte con un periodo de 14 horas, 39 minutos y 25 segundos. Sabiendo que el radio de Marte es R_M=3394 km, calcula:
   a. La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte
   b. La velocidad de escape de Marte de una nave espacial situada en Febos **(Junio 2006)**

34. **(C)** Enuncia las Leyes de Kepler

35. **(C)** Calcula la velocidad a la que orbita un satélite artificial situado en una órbita que dista 1000 km de la superficie terrestre. **DATOS: $G=6,67x10^{-11}$ SI; $M_{Tierra}=5,98x10^{24}$ kg; $R_{Tierra}=6370km$ (Septiembre 2006)**

36. **(P)** Un objeto de masa $M_1=100$ kg está situado en el punto A de coordenadas (6,0) m. Un segundo objeto de masa $M_2=399$ kg está situado en el punto B de coordenadas (-6,0) m. Calcular:
    a. El punto sobre el eje X para el cual el campo gravitatorio es nulo
    b. El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la masa M_1 se traslada desde el punto A hasta el punto C de coordenadas (-6,6) m

    Dato: $G=6,7x10^{-11}$ Nm^2/kg^2 (Junio 2007)

37. **(P)** Sabiendo que el radio orbital de la Luna es de $3,8x10^8$ m y que tiene un periodo de 27 días, calcula:
    a. El radio de la órbita de un satélite de comunicaciones que da una vuelta a la Tierra cada 24 horas (satélite geoestacionario)
    b. La velocidad de dicho satélite

    (Junio 2007)

38. (C) Define el momento angular de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto O. Pon un ejemplo razonado de Ley o fenómeno físico que sea una aplicación de la conservación del momento angular. **(Septiembre 2007)**

39. Calcula el trabajo necesario para poner en órbita de radio r un satélite de masa m , situado inicialmente sobre la superficie de un planeta que tiene radio R y masa M. Expresar el resultado en función de los datos anteriores y de la constante de gravitación universal G. **(Septiembre 2007)**

40. El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio, el cometa está a $8,75x10^7$ km del Sol y en el afelio está a $5,26x10^9$ km del Sol.

a) ¿En cual de estos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?
b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor Energía mecánica?

41. Un sistema estelar es una agrupación de varias estrellas que interaccionan gravitatoriamente. En un sistema estelar binario, una de las estrellas, situada en el origen de coordenadas, tiene una masa $m_1 = 1 \cdot 10^{30}$ kg, y la otra masa $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$ kg y se encuentra sobre el eje X en la posición (d, 0), con $d = 2 \cdot 10^6$ km. Suponiendo que dichas estrellas se pueden considerar masas puntuales, calcula:
    a) El módulo, dirección y sentido del campo gravitatorio en el punto intermedio entre las dos estrellas
    b) El punto sobre el eje X para el cual el potencial gravitatorio debido a la m_1 es igual al de la m_2.
    c) El módulo, dirección y sentido del momento angular de m2 respecto al origen, sabiendo que su velocidad es (0, v), siendo $v = 3 \cdot 10^5$ m/s. **(Junio de 2009)**

42. Hay tres medidas que se pueden realizar con relativa facilidad en la superficie de la Tierra: la aceleración de la gravedad (9,8 m/s2), el radio terrestre (6,37·106m) y el periodo de la órbita lunar (27 días, 7 horas y 44 segundos):
    a) Utilizando exclusivamente estos valores y suponiendo que se desconoce la masa de la Tierra, calcula la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.
    b) Calcula la densidad de la Tierra sabiendo que G = 6,67·1011 Nm2/kg2 **(Junio de 2009)**

BLOQUE 2:

1.- La distancia de Júpiter al Sol es 5,2 veces mayor que la de la Tierra al Sol. Calcula el período de Júpiter.
Sol: 11,86 años

2.- Dos masas de 5 y 10 Kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0, 3) y (4, 0) m. Calcula el vector fuerza que actúa sobre cada una de ellas debido a la acción gravitatoria de la otra masa. Representa en un esquema las masas y los vectores fuerza.
Sol: $\mathbf{F}_{1,2} = 1,6\ \mathbf{i} - 1,2\ \mathbf{j}$; $\mathbf{F}_{2,1} = -1,6\ \mathbf{i} + 1,2\ \mathbf{j}$

3.- Al enviar un satélite a la Luna se le sitúa en una órbita que corta a la recta que une los centros de la Tierra y la Luna por el punto en el que las fuerzas que sufre el satélite por la atracción de los dos astros son iguales. Cuando el satélite se encuentra en ese punto, calcula la distancia a la que está del centro de la Tierra.
Datos: la masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna. Distancia Tierra-Luna: $3,84\cdot10^8$ m
Sol: $3,45\cdot10^8$ m

4.- Determina la masa del Sol teniendo en cuenta que la Tierra tarda un año en completar una vuelta en torno a él y que el radio medio de su órbita es de 149,6 millones de kilómetros.
Dato: $G = 1.67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2
Sol: $1,99\cdot10^{30}$ kg

5.- Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre la superficie terrestre de 3185 km. Calcula la velocidad de traslación del satélite y su período de revolución.
Datos: R_T = 6370 km; $M_T = 5,98\cdot10^{24}$ kg
Sol: 6461 m/s; 9292 s

6.- Un objeto puntual P, de masa m, se encuentra en el interior de un campo gravitatorio que crea otra masa M. Dicho objeto se mueve con movimiento circular uniforme, de radio R, alrededor de la masa M. Calcula la variación de la energía del objeto al dar una vuelta. Si el objeto estuviera inicialmente en reposo, ¿cómo se movería?

7.- Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en el que su energía potencial vale -200 J hasta otro donde vale -400 J. Calcula el trabajo realizado por el campo.
Sol: 200 J

8.- Un astronauta de 100 kg de masa (incluyendo el traje) se encuentra sobre la superficie de un asteroide de $1,59\cdot10^{13}$ kg.

a) Determina la velocidad con que debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide.
b) El astronauta carga ahora con una mochila cuya masa es de 40 kg. ¿Le será más fácil salir del asteroide? ¿Por qué?

Dato: $G = 1.67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2
Sol: 1,33 m/s

9.- Un satélite de 1000 kg gira en una órbita geoestacionaria. Calcula la energía total que tiene en su órbita.
Datos: R_T = 6370 km; $M_T = 5,98\cdot10^{24}$ kg; $G = 1.67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2

10.- Dos partículas puntuales de 100 kg de masa, se encuentran situadas en los puntos (0,0) y (2,0) m, respectivamente. Se pide:

a) ¿Qué valor tiene el potencial gravitatorio en el punto (1,0) m? Tómese el origen de potenciales en el infinito.
b) Si una de las masas se deja en libertad, la fuerza gravitatoria haría que se acercara hacia la otra. Si no actúa ninguna otra fuerza, ¿qué velocidad tendrá cuando esté a una distancia de 30 cm?

Dato: G = $1.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Sol: $1{,}34 \cdot 10^{14}$ Nm/kg; $2{,}11 \cdot 10^{9}$ m/s